

1. Для случайного процесса с независимыми и однородными по времени приращениями вычислить математическое ожидание, дисперсию и корр. ф-ию.

$z(t)$ - процесс с нез. приращ., если $\forall t_0 < t_1 < \dots < t_n$
 $z(t_0), z(t_1) - z(t_0), \dots, z(t_n) - z(t_{n-1})$ независимы.

$z(t)$ - процесс с однородн. приращ. (со стач. приращ.),
если $\forall t \geq 0, \forall h > 0$ распределение с.в. $z(t+h) - z(t)$
зависит только от h .

Исходный процесс $\{X(t), t \geq 0\}$. Введём процесс
 $\{Y(t) = X(t) - X(0)\}$.

$$\begin{cases} Y(0) = 0 \text{ п.н.} \\ Y(t) \text{ имеет независ. приращ.} \\ \forall t \geq 0, \forall h > 0 \text{ распр. } Y(t+h) - Y(t) \text{ зависит только от } h \end{cases}$$

 $\Rightarrow \{Y(t)\}$ - процесс Леви.

1)
$$\begin{cases} \mathbb{E} Y(t) = a(t). & a(t+s) = \mathbb{E} Y(t+s) = \mathbb{E} (Y(t+s) - Y(t) + Y(t)) = \\ & = \mathbb{E} (Y(s) - Y(0)) + \mathbb{E} Y(t) = a(s) + a(t) \end{cases}$$

мат. ожидание процесса Леви явл-ся монот. ф-ей

$\Rightarrow a(t) = ct. \quad c = a(1) \Rightarrow \mathbb{E} Y(t) = t \mathbb{E} Y(1).$

Значит, $\mathbb{E} X(t) = \mathbb{E} Y(t) + \mathbb{E} X(0) = t \mathbb{E} Y(1) + \mathbb{E} X(0) =$
 $= t \mathbb{E} X(1) + (1-t) \mathbb{E} X(0).$

$$2). \quad \mathbb{D} Y(t) = \delta(t)$$

$$\begin{aligned} \delta(t+s) &= \mathbb{D}(Y(t+s)) = \mathbb{D}((Y(t+s) - Y(t)) + Y(t)) = \{\text{nez. pr.}\} = \\ &= \mathbb{D}(Y(t+s) - Y(t)) + \mathbb{D}(Y(t)) = \{\text{ognor. pr.}\} = \mathbb{D}(Y(s) - Y(0)) + \\ &+ \mathbb{D}(Y(t)) = \mathbb{D}(Y(s)) + \mathbb{D}(Y(t)) = \delta(t) + \delta(s) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{analoguino } \delta(t) = \tilde{C} t, \quad \mathbb{D}(Y(t)) = t \mathbb{D}(Y(1)).$$

$$\begin{aligned} \text{Значит, } \mathbb{D} X(t) &= \mathbb{D}(X(t) - X(0) + X(0)) = \{\text{nez. pr.}\} = \mathbb{D}(Y(t)) + \\ &+ \mathbb{D}(X(0)) = t \mathbb{D} Y(1) + \mathbb{D}(X(0)) = t \mathbb{D}(X(1) - X(0)) + \mathbb{D} X(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad \text{cov}(Y(t), Y(s)) &= \mathbb{E}(Y(t)Y(s)) - \mathbb{E}Y(t)\mathbb{E}Y(s) = \{t \geq s\} = \\ &= \mathbb{E}((Y(t) - Y(s) + Y(s))Y(s)) - \mathbb{E}Y(t)\mathbb{E}Y(s) = \mathbb{E}(Y(t) - Y(s))\mathbb{E}Y(s) + \\ &+ \mathbb{E}(Y(s))^2 - \mathbb{E}Y(t)\mathbb{E}Y(s) = \mathbb{E}(Y(s))^2 - (\mathbb{E}Y(s))^2 = \mathbb{D}Y(s) = \\ &= \mathbb{D}Y(\min(t, s)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Значит, } \text{cov}(X(t), X(s)) &= \mathbb{E}(X(t)X(s)) - \mathbb{E}X(t)\mathbb{E}X(s) = \\ &= \mathbb{E}((Y(t) + X(0))(Y(s) + X(0))) - \mathbb{E}(Y(t) + X(0))\mathbb{E}(Y(s) + X(0)) = \\ &= \mathbb{E}(Y(t)Y(s)) - \mathbb{E}Y(t)\mathbb{E}Y(s) + \mathbb{E}(X(0)Y(s)) + \mathbb{E}(X(0)Y(t)) + \\ &+ \mathbb{E}(X(0))^2 - \mathbb{E}X(0)\mathbb{E}Y(s) - \mathbb{E}X(0)\mathbb{E}Y(t) - (\mathbb{E}X(0))^2 = \{\text{nez. pr.}\} = \\ &= \text{cov}(Y(t), Y(s)) + \mathbb{D}X(0) = \min(t, s) \mathbb{D}(X(1) - X(0)) + \mathbb{D}X(0) \end{aligned}$$

2. Случайный процесс $z(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, где ω — случайная константа, A и φ независимы, $M(A) = m$, $D(A) = \sigma^2$, φ — р/м распределена на $[0, 2\pi]$. Вычислить м.о., дисперсию и корреляционную ф-ию для $z(t)$. Доказать, что это стационарный в широком смысле процесс.

$$\begin{aligned} E z(t) &= E(A \cos(\omega t + \varphi)) = \{ \text{независ.} \} = E A \cdot E \cos(\omega t + \varphi) = \\ &= m \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \cos(\omega t + x) dx = \frac{m}{2\pi} \sin(x + \omega t) \Big|_0^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K(t, s) &= \text{cov}(z(t), z(s)) = E(z(t) \cdot z(s)) - E z(t) E z(s) = \\ &= E(z(t) \cdot z(s)) = E(A^2 \cdot \cos(\omega t + \varphi) \cos(\omega s + \varphi)) = \\ &= E A^2 \cdot E(\cos(\omega t + \varphi) \cos(\omega s + \varphi)) = \frac{m^2 + \sigma^2}{2} (E \cos(\omega t + \omega s + 2\varphi) + \\ &+ E \cos(\omega(t-s))) = \frac{m^2 + \sigma^2}{2} \cos(\omega(t-s)) \end{aligned}$$

$$D z(t) = K(t, t) = \frac{m^2 + \sigma^2}{2}.$$

Проверим определение стационарности.

$$1) \forall t \exists E(|z(t)|^2) < \infty$$

$$2) a(t) := E z(t) = a = \text{const} \quad \forall t$$

$$3) K(t, s) = K_0(t-s)$$

№3. Пусть $W(t)$ - стандартный винеровский процесс.

Доказать, что он непрерывен в среднем квадратическом, но не явл-ся дифф. в среднем квадратическом.

$$a(t) = \mathbb{E}(W(t)) \equiv 0, \quad K(t, s) = \sigma^2 \min(t, s) = \min(t, s)$$

$z(t)$ непр. в с.к. в т. $t_0 \in [a, b]$, если:

1) $a(t)$ непр. в t_0

2) $K(t, s)$ непр. по паре аргументов в т. (t_0, t_0)

$\Rightarrow W(t)$ - непр. в с.к.

Случайный процесс $z(t)$ непр. дифф. на $[a, b] \Leftrightarrow$

1) $a(t)$ - непр. дифф. на $[a, b]$

2) $\exists \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} K(t, s)$ и она непр. в точках (t_0, t_0)

$K(t, s) = \sigma^2 \min(t, s)$ не имеет $\frac{\partial^2}{\partial t \partial s} K(t, s)$

$\Rightarrow W(t)$ не явл-ся дифф. в с.к.

✓ 4. $\zeta(t)$ - пуассоновский процесс, $\eta(t) = \int_0^t \zeta(s) ds$.

Вычислить м.о., дисперсию и корреляционную ф-ию для $\eta(t)$.

Применим теорему о свойствах интеграла Римана:

$\zeta(t)$ - непр. в с.к. на $[0, t]$, т.к. $\|\zeta(t+h) - \zeta(t)\|^2 =$

$$= E|\zeta(t+h) - \zeta(t)|^2 = \{ \text{процесс Пуассона - лева} \} = E|\zeta(h)|^2 =$$

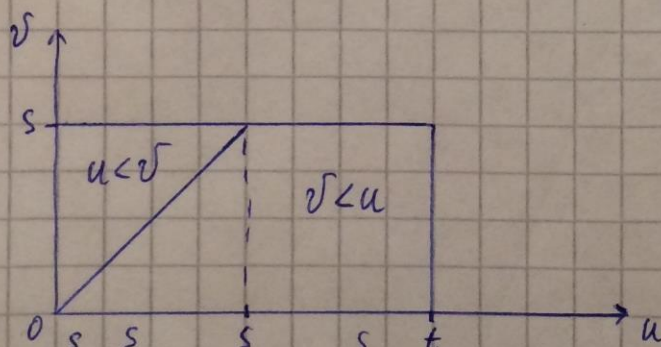
$$= D\zeta(h) + (E\zeta(h))^2 = \lambda h + \lambda^2 h^2 \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

$$\text{Значит, } E\eta(t) = E\left(\int_0^t \zeta(s) ds\right) = \int_0^t E\zeta(s) ds = \\ = \int_0^t \lambda ds = \frac{\lambda t^2}{2}$$

$$\text{cov}(\eta(t), \eta(s)) = \text{cov}\left(\int_0^t \zeta(s_1) ds_1, \int_0^s \zeta(s_2) ds_2\right) = \int_0^t \int_0^s K_\zeta(s_1, s_2) ds_1 ds_2 = \\ = \int_0^t \int_0^s \lambda \min(s_1, s_2) ds_1 ds_2 = \frac{\lambda s^2}{6} [3t - s]$$

$$D\eta(t) = \text{cov}(\eta(t), \eta(t)) = \frac{\lambda t^3}{3}.$$

$t \geq s$:



$$I_1 = \int_0^s \left(\int_0^s u dv \right) du = \int_0^s (su - u^2) du = \frac{1}{2} s^3 - \frac{1}{3} s^3 = \frac{s^3}{6}$$

$$I_2 = \int_0^s \left(\int_0^u v dv \right) du = \int_0^s \left(\frac{u^2}{2} \right) du = \frac{s^3}{6}$$

$$I_3 = \int_s^t \left(\int_0^s v dv \right) du = \int_s^t \left(\frac{s^2}{2} \right) du = \frac{1}{2} t s^2 - \frac{1}{2} s^3$$

$$I_1 + I_2 + I_3 = \frac{1}{2} t s^2 - \frac{1}{6} s^3$$

5. Пусть $W(t)$ - стандартный винеровский процесс.

$$\xi_1 = \int_0^{\pi} \cos(t) dW(t), \quad \xi_2 = \int_0^{\pi} \sin(t) dW(t). \quad \text{Найти:}$$

$$M(\xi_1), M(\xi_2), D(\xi_1), D(\xi_2), \text{cov}(\xi_1, \xi_2).$$

Используем свойства стохастического интеграла.

$$M(\xi_1) = M(\xi_2) = M\left(\int_0^{\pi} \dots dW(t)\right) = 0.$$

$$\begin{aligned} D(\xi_1) &= E|\xi_1|^2 = E\left|\int_0^{\pi} \cos t dW(t)\right|^2 = \int_0^{\pi} \cos^2 t dt = \\ &= \int_0^{\pi} \frac{\cos 2t + 1}{2} dt = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4} \int_0^{\pi} d\sin 2t = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(\xi_2) &= E|\xi_2|^2 = E\left|\int_0^{\pi} \sin t dW(t)\right|^2 = \int_0^{\pi} \sin^2 t dt = \\ &= \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} \int_0^{\pi} d\sin 2t = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{cov}(\xi_1, \xi_2) &= E(\xi_1 \cdot \xi_2) - E\xi_1 \cdot E\xi_2 = E(\xi_1 \cdot \xi_2) = \\ &= \int_0^{\pi} \sin t \cos t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin 2t dt = -\frac{1}{4} \cos 2t \Big|_0^{\pi} = 0 \end{aligned}$$

✓ 6. Корреляционная функция стационарного процесса равна $R(\tau) = \exp(-\tau^2)$. Найти спектральную плотность $f(\lambda)$. Обратно, дана спектральная плотность $f(\lambda) = \exp(-|\lambda|)$, найти $K(\tau)$.

$$1) f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda\tau} R(\tau) d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda\tau} e^{-\tau^2} d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \lambda\tau e^{-\tau^2} d\tau = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\lambda^2}{4}}.$$

$$2) K(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda\tau} e^{-|\lambda|} d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \lambda\tau e^{-|\lambda|} d\lambda = 2 \int_0^{\infty} e^{-\lambda} \cos \lambda\tau d\lambda =$$

$$= \frac{2}{1+\tau^2}.$$

$$I = \int_0^{\infty} e^{-\lambda} \cos \lambda\tau d\lambda = \frac{1}{\tau} \int_0^{\infty} e^{-\lambda} d \sin \lambda\tau = \frac{1}{\tau} e^{-\lambda} \sin \lambda\tau \Big|_0^{\infty} +$$

$$+ \frac{1}{\tau} \int_0^{\infty} e^{-\lambda} \sin \lambda\tau d\lambda = -\frac{1}{\tau^2} \int_0^{\infty} e^{-\lambda} d \cos \lambda\tau = -\frac{1}{\tau^2} e^{-\lambda} \cos \lambda\tau \Big|_0^{\infty} +$$

$$- \frac{1}{\tau^2} \int_0^{\infty} e^{-\lambda} \cos \lambda\tau d\lambda = \frac{1}{\tau^2} - \frac{1}{\tau^2} I; \quad I = \frac{1}{\tau^2} \left(\frac{\tau^2+1}{\tau^2} \right)^{-1} = \frac{1}{\tau^2+1}$$

в 1) - хар. ф-ия норм. распр. с $(0, \frac{1}{2})$

в 2) - хар. ф-ия распр. Лапласа с $(1, 0)$

7. Пусть $W(t)$ - стандартный винеровский процесс,
 $h(\tau) = \exp(-\tau), \tau > 0, \zeta(t) = \int_{-\infty}^t h(t-s) W(s) ds$.

Вычислим м.о., дисперсию и корреляционную функцию
 для марковского процесса. Это же самое для $\eta(t) = \int_{-\infty}^t h(t-s) dW(s)$.

$$1) \zeta(t) = \int_{-\infty}^t e^{-t} e^s W(s) ds = e^{-t} \int_{-\infty}^t e^s W(s) ds.$$

$W(t)$ - непрерывн. в с.к. $\Rightarrow$ применим теорему о сд-баз
 непрерыва Дунада.

$$\mathbb{E} \zeta(t) = e^{-t} \mathbb{E} \left(\int_{-\infty}^t e^s W(s) ds \right) = e^{-t} \int_{-\infty}^t e^s \mathbb{E}(W(s)) ds = 0$$

$$\text{cov}(\zeta(t_1), \zeta(t_2)) = \text{cov} \left(e^{-t_1} \int_{-\infty}^{t_1} e^{s_1} W(s_1) ds_1, e^{-t_2} \int_{-\infty}^{t_2} e^{s_2} W(s_2) ds_2 \right) =$$

$$= e^{-(t_1+t_2)} \text{cov} \left(\int_{-\infty}^{t_1} e^{s_1} W(s_1) ds_1, \int_{-\infty}^{t_2} e^{s_2} W(s_2) ds_2 \right) =$$

$$= e^{-(t_1+t_2)} \left(\int_{-\infty}^{t_1} \int_{-\infty}^{t_2} K_W(s_1, s_2) e^{(s_1+s_2)} ds_1 ds_2 \right) =$$

$$= e^{-(t_1+t_2)} \int_{-\infty}^{t_1} \int_{-\infty}^{t_2} e^{(s_1+s_2)} \min(s_1, s_2) ds_1 ds_2 = t_1 - 1 - \frac{1}{2} e^{t_1-t_2}$$

$$\mathbb{D} \zeta(t) = \text{cov}(\zeta(t), \zeta(t)) = t - \frac{3}{2}$$

2) Вычислим корреляционную функцию:

$$\mathbb{E} \eta(t) = \mathbb{E} \left(\int_{-\infty}^t e^{-t} e^s dW(s) \right) = e^{-t} \mathbb{E} \left(\int_{-\infty}^t e^s dW(s) \right) = 0$$

$$\text{cov}(\eta(t_1), \eta(t_2)) = \mathbb{E}(\eta(t_1) \cdot \eta(t_2)) =$$

$$= e^{-(t_1+t_2)} \mathbb{E} \left(\int_{-\infty}^{t_1} e^{s_1} dW(s_1) \cdot \int_{-\infty}^{t_2} e^{s_2} dW(s_2) \right) = e^{-(t_1+t_2)} \int_{-\infty}^{t_1} e^{2s} ds =$$

$$= \frac{1}{2} e^{-(t_1+t_2)} e^{2t_1} = \frac{1}{2} e^{t_1-t_2}$$

$$\mathbb{D} \eta(t) = \text{cov}(\eta(t), \eta(t)) = \frac{1}{2}.$$

v 7. (unmerged)

$$\begin{aligned}
 & e^{-(t_1+t_2)} \int_{-\infty}^{t_1} \int_{-\infty}^{t_2} e^{(s_1+s_2)} \min(s_1, s_2) ds_1 ds_2 = \\
 & = e^{-(t_1+t_2)} \int_{-\infty}^{t_1} \left(\int_{-\infty}^{s_2} e^{(s_1+s_2)} s_1 ds_1 + \int_{s_2}^{t_2} e^{(s_1+s_2)} s_2 ds_1 \right) ds_2 = \\
 & = e^{-(t_1+t_2)} \int_{-\infty}^{t_1} \left(s_1 e^{s_1+s_2} \Big|_{-\infty}^{s_2} - e^{s_1+s_2} \Big|_{-\infty}^{s_2} + s_2 e^{s_1+s_2} \Big|_{s_2}^{t_2} \right) ds_2 = \\
 & = e^{-(t_1+t_2)} \int_{-\infty}^{t_1} \left(-e^{2s_2} + s_2 e^{t_2+s_2} \right) ds_2 = \\
 & = e^{-(t_1+t_2)} \left(-\frac{1}{2} e^{2s_2} \Big|_{-\infty}^{t_1} + s_2 e^{t_2+s_2} \Big|_{-\infty}^{t_1} - e^{t_2+s_2} \Big|_{-\infty}^{t_1} \right) = \\
 & = e^{-(t_1+t_2)} \left(-\frac{1}{2} e^{2t_1} + e^{\frac{t_1+t_2}{2}} - e^{t_1+t_2} \right) = t_1 - 1 - \frac{1}{2} e^{t_1-t_2}
 \end{aligned}$$

н 8. Случайный процесс $z(t)$ удовлетворяет стохастическому дифф. уравнению $dz(t) = -z(t)dt + d\eta(t)$, $t \geq 0$. Найдите общий вид решения этого уравнения.

$$\begin{cases} dz(t) = -z(t)dt + d\eta(t) \\ z(0) = z_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dW(t,s)}{dt} = -W(t,s), t > s \\ W(s,s) = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow W(t,s) = e^{-(t-s)}$ — фундаментальное решение

$$\begin{aligned} \text{Значит, } z(t) &= W(t,0)z_0 + \int_0^t W(t,s)d\eta(s) = \\ &= e^{-t}z_0 + \int_0^t e^{-(t-s)}d\eta(s) = e^{-t}z(0) + \int_0^t e^{-(t-s)}d\eta(s). \end{aligned}$$

н 9. Стат. случайный процесс $z(t)$ имеет спектральную плотность $f(\lambda) = \exp(-|\lambda|)$. Доказать, что этот процесс является дифференцируемым в среднем квадр. и найти корреляционную функцию для производной.

$$\begin{aligned} \text{Необх. и дост. условие } \exists z'(t): \int_{-\infty}^{+\infty} |\lambda|^2 f(\lambda) d\lambda < \infty. \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 e^{-|\lambda|} d\lambda = 2 \int_0^{\infty} \lambda^2 e^{-\lambda} d\lambda = 2\Gamma(3) = 2 \cdot 2! = 4 < \infty. \end{aligned}$$

Соотн., связывающее спектр н. стат. процесса и его лн. преобраз.:

$$f_1(\lambda) = |\varphi(\lambda)|^2 f(\lambda), \text{ где } \varphi(\lambda) - \text{спектр. характеристика лн. преобраз.}$$

$$\begin{aligned} \text{В случае произв. } \varphi(\lambda) = i\lambda \quad f_1(\lambda) = \lambda^2 e^{-|\lambda|}. \text{ Тогда } K_1(\tau) = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 e^{-|\lambda|} e^{i\lambda\tau} d\lambda = 2 \int_0^{\infty} \lambda^2 e^{-\lambda} \cos \lambda\tau d\lambda = 2 \cdot \frac{2-6\tau^2}{(\tau^2+1)^3} = -\frac{4(3\tau^2-1)}{(\tau^2+1)^3}. \end{aligned}$$

~ 10. Случайный процесс $z(t)$ имеет среднее 0 и корреляционную функцию $\cos(t-s)$. Найти корреляционную ф-ию для процесса $\eta(t) = z(t) + z'(t)$.

По теореме о непр. дифф. процесса:

$$a(t) = \mathbb{E} z(t) = 0 \Rightarrow \mathbb{E}(z'(t)) = a'(t) = 0.$$

$$\begin{aligned} \cos(z(t), z(s)) &= K(t, s); \cos(z'(t), z(s)) = \frac{\partial}{\partial t} K(t, s) = \\ &= -\sin(t-s); \cos(z(t), z'(s)) = \frac{\partial}{\partial s} K(t, s) = \sin(t-s); \\ \cos(z'(t), z'(s)) &= \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} K(t, s) = \cos(t-s) \end{aligned}$$

Тогда корреляционная ф-ия для $\eta(t)$:

$$\begin{aligned} K_{\eta}(t, s) &= \cos(z(t) + z'(t), z(s) + z'(s)) = \\ &= \cos(z(t), z(s)) + \cos(z(t), z'(s)) + \cos(z'(t), z(s)) + \\ &+ \cos(z'(t), z'(s)) = \cos(t-s) - \sin(t-s) + \sin(t-s) + \cos(t-s) = \\ &= 2\cos(t-s). \end{aligned}$$

11. $W(t)$, $t \geq 0$ — стандартный винеровский процесс.

Образует случайную последовательность по правилу:

$\xi_n = W(n) - W(n-1)$, $n \geq 1$. Доказать, что это стационарная в широком смысле случайная посл-ть.

Из свойств винеровского процесса: $\xi_n = W(n) - W(n-1) \sim N(0, 1)$.

Значит, $\exists E|\xi_n|^2 < \infty$ и $E\xi_n = \text{const} = 0 \quad \forall n$.

$$\begin{aligned} \text{cov}(\xi_n, \xi_{n+m}) &= \text{cov}(W(n) - W(n-1), W(n+m) - W(n+m-1)) = \\ &= \text{cov}(W(n), W(n+m)) - \text{cov}(W(n), W(n+m-1)) - \text{cov}(W(n-1), W(n+m)) + \\ &+ \text{cov}(W(n-1), W(n+m-1)) = \min(n, n+m) - \min(n, n+m-1) - \\ &- \min(n-1, n+m) + \min(n-1, n+m-1) \end{aligned}$$

$$m > 0 \Rightarrow \text{cov}(\xi_n, \xi_{n+m}) = n - n - (n-1) + (n-1) = 0$$

$$m = 0 \Rightarrow \text{cov}(\xi_n, \xi_{n+m}) = n - (n-1) - (n-1) + (n-1) = 1$$

$$m < 0 \Rightarrow \text{cov}(\xi_n, \xi_{n+m}) = (n+m) - (n+m-1) - (n+m) + (n+m-1) = 0$$

Значит, $\text{cov}(\xi_n, \xi_m) = K(n, m) = K_0(n-m)$, где

$$K_0(a) = \begin{cases} 1, & a=0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

✓ 12. Стационарная последовательность $z(n)$ имеет спектральную плотность $f(\lambda) = 10 + 6 \cos \lambda = |3 + e^{-i\lambda}|^2$. По наблюдениям $z(n)$, $n \leq 0$, найти оптимальный линейный прогноз на 1 шаг вперед.

$$1) f(\lambda) = |f_1(\lambda)|^2; f_1(\lambda) = 3 + e^{-i\lambda}$$

$$2) h_1 f_1(\lambda) = e^{i\lambda} (3 + e^{-i\lambda}) = 1 + 3e^{i\lambda}$$

$$3) h_1 f_1(\lambda) = k_1 + k_2, k_1 = 1 \in L_{\leq 0}, k_2 = 3e^{i\lambda} \in L_{> 0}$$

$$4) g(\lambda) = \sum_{n \leq 0} \hat{c}_n e^{in\lambda}; g(\lambda) f_1(\lambda) = k_1$$

$$(3 + e^{-i\lambda})(c_0 + c_{-1}e^{-i\lambda} + c_{-2}e^{-i2\lambda} + \dots) = 3c_0 + (c_0 + 3c_{-1})e^{-i\lambda} + (c_{-1} + 3c_{-2})e^{-i2\lambda} + \dots = 1$$

$$\Rightarrow c_0 = \frac{1}{3}, c_{-1} = -\frac{1}{3}, c_{-2} = \frac{1}{27}, \dots$$

$$\text{Таким образом, } \hat{z}_1 = \sum_{n \leq 0} \hat{c}_n z_n = - \sum_{n \leq 0} (-3)^{n+1} z(n).$$

~13. Найти наилучшую линейную оценку для с.в. η в
пр-ве $L = \{a + b\zeta\}$, где $M(\zeta) = M(\eta) = 0$, $D(\zeta) = 1$, $\text{cov}(\zeta, \eta) = 1$.

По лемме о перпендикуляре, наилучшая оценка $\hat{\eta} \in L$
удовл. $(\eta - \hat{\eta}, \tilde{\zeta}) = 0 \quad \forall \tilde{\zeta} \in L$.

$$\hat{\eta} = \hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2 \zeta, \quad \tilde{\zeta} = \alpha_1 + \alpha_2 \zeta$$

$$\begin{aligned} (\eta - \hat{\eta}, \tilde{\zeta}) &= E((\eta - \hat{\eta})\tilde{\zeta}) = E((\eta - \hat{\alpha}_1 - \hat{\alpha}_2 \zeta)(\alpha_1 + \alpha_2 \zeta)) = \\ &= \alpha_1 E\eta + \alpha_2 E(\zeta\eta) - \hat{\alpha}_1 \alpha_1 - \hat{\alpha}_1 \alpha_2 E\zeta - \hat{\alpha}_2 \alpha_1 E\zeta - \hat{\alpha}_2 \alpha_2 E\zeta^2 = \\ &= \alpha_2 - \hat{\alpha}_1 \alpha_1 - \hat{\alpha}_2 \alpha_2 = 0. \end{aligned}$$

Берём $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0 \Rightarrow \hat{\alpha}_1 = 0$. Затем $\alpha_2 = 1 \Rightarrow \hat{\alpha}_2 = 1$.

Таким образом, $\hat{\eta} = \zeta$.

14. Для $t \in [0, \ln 2]$ задан процесс со стохастическим дифференциалом $dz(t) = (d_1 e^t + d_2 e^{2t})dt + d\eta_0(t)$. Вычислить вектор оптимальных оценок для d_1 и d_2 .

$$\varphi_1(t) = e^t, \quad \varphi_2(t) = e^{2t}, \quad \hat{d}_k = \int_0^{\ln 2} C_k(t) dz(t)$$

$$b_{11} = \int_0^{\ln 2} \varphi_1 \varphi_1 dt = \int_0^{\ln 2} e^{2t} dt = \frac{1}{2} e^{2t} \Big|_0^{\ln 2} = \frac{1}{2} (4 - 1) = \frac{3}{2}$$

$$b_{12} = b_{21} = \int_0^{\ln 2} \varphi_1 \varphi_2 dt = \int_0^{\ln 2} e^{3t} dt = \frac{1}{3} e^{3t} \Big|_0^{\ln 2} = \frac{1}{3} (8 - 1) = \frac{7}{3}$$

$$b_{22} = \int_0^{\ln 2} \varphi_2 \varphi_2 dt = \int_0^{\ln 2} e^{4t} dt = \frac{1}{4} e^{4t} \Big|_0^{\ln 2} = \frac{1}{4} (16 - 1) = \frac{15}{4}$$

$$B = (b_{ik}), \quad C = B^{-1}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{7}{3} \\ \frac{7}{3} & \frac{15}{4} \end{pmatrix}$$

$$\det B = \frac{45}{8} - \frac{49}{9} = \frac{405 - 392}{72} = \frac{13}{72}$$

$$\Rightarrow C = \frac{72}{13} \begin{pmatrix} \frac{15}{4} & -\frac{7}{3} \\ -\frac{7}{3} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$C_k(t) = \sum_{j=1}^n C_{kj} \varphi_j(t)$$

$$C_1(t) = \frac{18 \cdot 15}{13} e^t - \frac{24 \cdot 7}{13} e^{2t} = \frac{270}{13} e^t - \frac{168}{13} e^{2t}$$

$$C_2(t) = -\frac{168}{13} e^t + \frac{108}{13} e^{2t}$$

$$\hat{d}_1 = \int_0^{\ln 2} C_1(t) dz(t)$$

$$\hat{d}_2 = \int_0^{\ln 2} C_2(t) dz(t)$$

15. При движении по некоторому лабиринту Вы в первый раз равновероятно сворачиваете либо налево, либо направо. Далее на каждой развилке Вы с вер. 0,7 сворачиваете туда же, что и в предыдущий раз, а с вероятностью 0,3 в противоположную сторону. Какова вероятность того, что вы сверните налево:

а) на третьей развилке;

б) на 1000-ой развилке?

а) состояние 1 - поверн. налево, 2 - поверн. направо

$P = \begin{bmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,3 & 0,7 \end{bmatrix}$ - матрица вер. перехода за 1 шаг

Начальное распределение $p^0 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

$$P(2) = P \cdot P = \begin{bmatrix} 0,58 & 0,42 \\ 0,42 & 0,58 \end{bmatrix}$$

$$p^2 = p^0 \cdot P(2) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \begin{bmatrix} 0,58 & 0,42 \\ 0,42 & 0,58 \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$\Rightarrow$ искомая вероятность $\frac{1}{2}$.

б) P - симметричная $\Rightarrow P(999)$ - симметричная.

$$\Rightarrow p^{999} = p^0 P(999) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$\Rightarrow$ искомая вероятность $\frac{1}{2}$.

~ 16. Пусть цепь Маркова с непрерывным временем имеет два состояния и следующую матрицу интенсивностей перехода $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.

Используя ур-я Колмогорова, найти вер-ти перехода $P_{ij}(t)$, $t \geq 0$.

$$\begin{cases} \frac{dP(t)}{dt} = Q P(t) \\ P(0) = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{P}_{11}(t) & \dot{P}_{12}(t) \\ \dot{P}_{21}(t) & \dot{P}_{22}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11}(t) & P_{12}(t) \\ P_{21}(t) & P_{22}(t) \end{bmatrix}$$

Решение системы: $P(t) = e^{Qt}$ - экспоненциал.

$$P(t) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 + e^{-3t} & 1 - e^{-3t} \\ 2 - 2e^{-3t} & 1 + 2e^{-3t} \end{bmatrix}$$

Внимание! Можно с помощью Wolfram посчитать e^{Qt} и не тратить время. Дальше "естный" способ.

$$\begin{cases} \dot{P}_{11}(t) = -P_{11}(t) + P_{21}(t) \\ \dot{P}_{21}(t) = 2P_{11}(t) - 2P_{21}(t) \\ P_{11}(0) = 1 \\ P_{21}(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda+3) = 0$$

$\lambda = 0 \Rightarrow$ собств. вектор находится из $\begin{bmatrix} -1 & 1 & | & 0 \\ 2 & -2 & | & 0 \end{bmatrix}$
таким образом, $v_1 = (1, 1)$

$$\lambda = -3 \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow v_2 = (1, -2)$$

$$\begin{bmatrix} P_{11}(t) \\ P_{21}(t) \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{\underset{1}{0}t} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^{-3t}$$

Начальные условия: $\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1 - 2C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} C_1 = \frac{2}{3} \\ C_2 = \frac{1}{3} \end{matrix}$

$$P_{11}(t) = \frac{1}{3}(2 + e^{-3t})$$

$$P_{12}(t) = 1 - P_{11}(t) = \frac{1}{3}(1 - e^{-3t})$$

$$P_{21}(t) = \frac{1}{3}(2 - 2e^{-3t})$$

$$P_{22}(t) = 1 - P_{21}(t) = \frac{1}{3}(1 + 2e^{-3t})$$

$$P(t) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 + e^{-3t} & 1 - e^{-3t} \\ 2 - 2e^{-3t} & 1 + 2e^{-3t} \end{bmatrix}$$